

О.С. Істер

КОМБІНАТОРИКА,
БІНОМ НЬЮТОНА
І ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
У ШКОЛІ

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Четверте видання



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

*Рекомендовано Міністерством освіти України
(лист № 3/2 від 22.02.1999 р.)*

Істер О.С.

I89 Комбінаторика, біном Ньютона і теорія ймовірностей у школі: Навчальний посібник. 4-е вид. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 196 с.

ISBN 978-966-10-1898-2

У посібнику зібрано більш ніж 700 задач з комбінаторики, бінома Гьютонна і теорії ймовірностей, які детально розподілені за темами і методами розв'язання. Цей посібник буде корисний учням і вчителям як спеціалізованих класів, так і масової школи.

Також книга буде корисна абітурієнтам, слухачам підготовчих відділень вузів, репетиторам; може бути використана вчителями як дидактичний матеріал.

ББК 21.1я172

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-1898-2

© Навчальна книга – Богдан,
майнові права, 2011

Передмова

Комбінаторика — розділ елементарної математики, в якому для скінченних множин розглядаються різні сполуки елементів: *комбінації (сполучення), розміщення, перестановки* тощо.

Теорія ймовірностей — математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

Задачі з комбінаторики і теорії ймовірностей є практично у кожному варіанті у збірниках завдань для державної підсумкової атестації 9 та 11 класів; також декілька задач з цих розділів математики щорічно пропонуються на зовнішньому незалежному оцінюванні.

На жаль, літератури з комбінаторики і теорії ймовірностей для школи дуже і дуже мало, і тому допомогти учням, абітурієнтам, слухачам підготовчих курсів, учителям засвоїти ці теми — одна із задач, яку ставить автор.

Книга містить близько 700 задач (крім того, в деяких номерах містяться дві і більше задач), з яких біля 400 розв'язані. Серед задач є як задачі з відомих збірників, так і оригінальні авторські. В кожному параграфі задачі розміщені (на думку автора) в порядку зростання складності, за винятком тих випадків, коли на початку параграфа розв'язується загальна задача і виводиться формула, що потім застосовується, і тих випадків, коли параграф складається з декількох самостійних частин (тоді принцип «від легкого до важкого» діє в кожній такій частині).

Багато задач розв'язані не з числами, а з буквами (a , b , p , ...), при цьому, замінивши букви на числа, вчитель отримає багатий дидактичний матеріал.

Автор буде вдячний за надіслані раціональніші розв'язання задач з цієї книги, нові цікаві задачі, поради щодо змісту та оформлення книги.

Загальні правила комбінаторики і поняття факторіала

Розглянемо задачі, які допоможуть вивести два загальних правила комбінаторики.

- ✓ **Задача 1.** У першому ящику m пронумерованих кульок, а в другому — r пронумерованих кульок. Випадковим чином вибираємо з якого-небудь ящика одну кульку. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. З першого ящика кульку можна вибрати m різними способами, а з другого — r різними способами. Отже, всього способів $n = m + r$.

Таким чином, загальне правило, яке носить назву **правило суми**, можна сформулювати так:

якщо деякий об'єкт А можна вибрати m способами, а об'єкт В — r способами (не такими, як об'єкт А), то об'єкт «або А, або В» можна вибрати $m + r$ способами.

- ✓ **Задача 2.** У першому ящику m білих пронумерованих кульок, а в другому — r чорних пронумерованих кульок. Скількома способами можна вибрати пару з однієї білої і однієї чорної кульок?

Розв'язання. З першого ящика білу кульку можна вибрати m різними способами і до кожної обраної кульки можна взяти в пару довільну чорну кульку, що можна зробити r різними способами. Отже, всього способів $n = m \cdot r$.

Узагальнюючи цю задачу, отримаємо **правило добутку**:

якщо деякий об'єкт А можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший об'єкт В можна вибрати (незалежно від вибору об'єкта А) r способами, то пару об'єктів А і В можна вибрати $m \cdot r$ способами.

Дуже важливим в комбінаториці є поняття факторіала.

Означення. **Факторіал** — функція, яка визначена на множині цілих невід'ємних чисел і ставить у відповідність даному числу n добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно, що позначається $n!$. Отже, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, причому, за означенням, $0! = 1$.

Розділ 1

Комбінаторика без повторень

- ✓ **Задача 11.** Третій доданок розкладу $(2x + x^{-2})^n$ не містить x . При яких значеннях x цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $(1 + x^3)^{30}$?

Розв'язання. Третій доданок розкладу $(2x + x^{-2})^n$ дорівнює $T_3 = C_n^2 \cdot (x^{-2})^2 \cdot (2x)^{n-2} = C_n^2 \cdot x^{-4} \cdot 2^{n-2} \cdot x^{n-2} = 2^{n-2} \cdot C_n^2 \cdot x^{n-6}$.

Тоді $n = 6$. Звідси $T_3 = 2^4 \cdot C_6^2 = 240$. Другий доданок у $(1 + x^3)^{30}$ дорівнює $T_2' = C_{30}^1 \cdot (x^3)^1 \cdot 1^{30-1} = 30x^3$. Маємо $30x^3 = 240$, $x = 2$.

Вправи

I. Знайти члени, що не містять x , у розкладах (1–7).

- $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x}\right)^{15}$.
- $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$.
- $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x^8}} + \sqrt[3]{x^2}\right)^7$.
- $(ax + x^{-\frac{1}{4}})^n$, якщо сума біноміальних коефіцієнтів з непарними номерами дорівнює 512.
- $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^m$, якщо коефіцієнти четвертого і тринадцятого членів рівні між собою.
- $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, якщо сума коефіцієнтів першого, другого та третього членів дорівнює 46.
- $\left(5x^{-\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^n$, якщо біноміальні коефіцієнти третього і десятого членів рівні.

II. Розв'язати задачі (8, 9).

- Знайти показник степеня бінома, якщо другий доданок розкладу $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ не залежить від x .
- Знайти P_n , якщо третій член розкладу $(x^{-\frac{2}{3}} + x)^n$ не залежить від x .

Додаток 2

n	$P_n = n!$	n	$P_n = n!$
1	1	36	$\approx 3,719933268 \cdot 10^{41}$
2	2	37	$\approx 1,376375309 \cdot 10^{43}$
3	6	38	$\approx 5,230226175 \cdot 10^{44}$
4	24	39	$\approx 2,039788208 \cdot 10^{46}$
5	120	40	$\approx 8,159152832 \cdot 10^{47}$
6	720	41	$\approx 3,345252661 \cdot 10^{49}$
7	5040	42	$\approx 1,405006118 \cdot 10^{51}$
8	40320	43	$\approx 6,041526306 \cdot 10^{52}$
9	362880	44	$\approx 2,658271575 \cdot 10^{54}$
10	3628800	45	$\approx 1,196222209 \cdot 10^{56}$
11	39916800	46	$\approx 5,502622216 \cdot 10^{57}$
12	479001600	47	$\approx 2,586232415 \cdot 10^{59}$
13	6227020800	48	$\approx 1,241391559 \cdot 10^{61}$
14	87178291200	49	$\approx 6,08281864 \cdot 10^{62}$
15	1307674368000	50	$\approx 3,04140932 \cdot 10^{64}$
16	20922789888000	51	$\approx 1,551118753 \cdot 10^{66}$
17	355687428096000	52	$\approx 8,065817517 \cdot 10^{67}$
18	6402373705728000	53	$\approx 4,274883284 \cdot 10^{69}$
19	121645100408832000	54	$\approx 2,308436973 \cdot 10^{71}$
20	2432902008176640000	55	$\approx 1,269640335 \cdot 10^{73}$
21	51090942171709440000	56	$\approx 7,109985878 \cdot 10^{74}$
22	112400072777607680000	57	$\approx 4,05269195 \cdot 10^{76}$
23	25852016738884976640000	58	$\approx 2,350561331 \cdot 10^{78}$
24	620448401733239439360000	59	$\approx 1,386831185 \cdot 10^{80}$
25	15511210043330985984000000	60	$\approx 8,320987113 \cdot 10^{81}$
26	403291461126605635584000000	61	$\approx 5,075802139 \cdot 10^{83}$
27	10888869450418352160768000000	62	$\approx 3,146997326 \cdot 10^{85}$
28	304888344611713860501504000000	63	$\approx 1,982608315 \cdot 10^{87}$
29	8841761993739701954543616000000	64	$\approx 1,268869322 \cdot 10^{89}$
30	26525285981219105863630848000000	65	$\approx 8,247650592 \cdot 10^{90}$
31	822283865417792281772556288000000	66	$\approx 5,443449391 \cdot 10^{92}$
32	26313083693369353016721801216000000	67	$\approx 3,647111092 \cdot 10^{94}$
33	$\approx 8,683317619 \cdot 10^{96}$	68	$\approx 2,480035542 \cdot 10^{96}$
34	$\approx 2,95232799 \cdot 10^{98}$	69	$\approx 1,711224524 \cdot 10^{98}$
35	$\approx 1,033314797 \cdot 10^{40}$	70	$\approx 1,197857167 \cdot 10^{100}$

Для досить великих n можна користуватись формулою Стірлінга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Зміст

Передмова.....	3
Загальні правила комбінаторики і поняття факторіала.....	4
Розділ 1. Комбінаторика без повторень	
§1. Розміщення	6
§2. Перестановки	10
§3. Сполучення (комбінації).....	13
§4. Задачі з використанням основних формул комбінаторики	21
§5. Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази	24
§6. Розв'язування систем рівнянь, що містять комбінаторні вирази.....	32
§7. Доведення тотожностей і спрощення виразів, що містять комбінаторні символи	36
§8. Застосування рівнянь при розв'язуванні комбінаторних задач.....	39
§9. Розв'язування та доведення нерівностей	44
§10. Логічні задачі. Задачі на правило суми і правило добутку	49
§11. Задачі підвищеної складності з комбінаторики. Олімпіадні задачі	56
Розділ 2. Біном Ньютона	
§12. Біном Ньютона. Властивості розкладу бінома та біноміальних коефіцієнтів.....	66
§13. Знаходження членів розкладу бінома Ньютона.....	72
§14. Розв'язування задач з біноміальними коефіцієнтами.....	76
§15. Знаходження доданка, що не містить змінну, і показника бінома, якщо такий доданок відомий	82
§16. Знаходження доданка, що містить змінні у фіксованих степенях	88
§17. Розв'язування задач на відношення членів розкладу, їхні добутки і рівність.....	93
§18. Знаходження раціональних членів розкладу та їхньої кількості.....	97
§19. Розв'язування задач на порівняння членів розкладу, їхні різницю і суму	101
§20. Знаходження найбільшого члена розкладу і члена розкладу з найбільшим коефіцієнтом	105

§21. Доведення тотожностей і спрощення виразів, що містять біноміальні коефіцієнти.....	109
Розділ 3. Теорія ймовірностей	
§22. Поняття про ймовірність. Класичне означення ймовірності. Найпростіші випадки підрахунку ймовірностей.....	116
§23. Розв'язування задач на підрахунок ймовірностей за допомогою формул комбінаторики	124
§24. Геометричне означення ймовірності.....	132
§25. Операції над подіями. Найпростіші властивості операцій над подіями	141
§26. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.....	145
§27. Загальна теорема додавання ймовірностей. Теорема множення ймовірностей незалежних подій.....	151
§28. Умовна ймовірність. Загальна теорема множення ймовірностей	161
§29. Ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій.....	170
§30. Схема і формула Бернуллі.....	176
Відповіді до вправ	183
Список використаної та рекомендованої літератури	186
Додаток 1	187
Додаток 2	192



Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

КОМБІНАТОРИКА, БІНОМ НЬЮТОНА ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ШКОЛІ

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Ростислав Крамар*

Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 16.03.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 11.39. Умовн. фарбо-відб. 11.39.

Видавництво «Навчальна книга — Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга — Богдан, а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1898-2



9 | 789661 | 018982 |