О.С. Істер

КОМБІНАТОРИКА, БІНОМ НЬЮТОНА І ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ШКОЛІ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Четверте видання

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 21.1я721
І89

Рекомендовано Міністерством освіти України
(лист № 3/2 від 22.02.1999 р.)

Істер О.С.
І89 Комбінаторика, біном Ньютона і теорія ймовірностей у школі: Навчальний посібник. 4-е вид. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 196 с.

ISBN 978-966-10-1898-2

У посібнику зібрано більш ніж 700 задач з комбінаторики, бінома Гьютона і теорії ймовірностей, які детально розподілені за темами і методами розв'язання. Цей посібник буде корисний учням і вчителям як спеціалізованих класів, так і масової школи.

Також книга буде корисна абітурієнтам, слухачам підготовчих відділень вузів, репетиторам; може бути використана вчителями як дидактичний матеріал.

ББК 21.1я172

ISBN 978-966-10-1898-2

Передмова

Комбінаторика — розділ елементарної математики, в якому для скінченних множин розглядаються різні сполуки елементів: *комбінації (сполучення), розміщення, перестановки* тощо.

Теорія ймовірностей — математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

Задачі з комбінаторики і теорії ймовірностей є практично у кожному варіанті у збірниках завдань для державної підсумкової атестації 9 та 11 класів; також декілька задач з цих розділів математики щорічно пропонуються на зовнішньому незалежному оцінюванні.

На жаль, літератури з комбінаторики і теорії ймовірностей для школи дуже і дуже мало, і тому допомогти учням, абітурієнтам, слухачам підготовчих курсів, учителям засвоїти ці теми — одна із задач, яку ставить автор.

Книга містить близько 700 задач (крім того, в деяких номерах містяться дві і більше задач), з яких біля 400 розв'язані. Серед задач є як задачі з відомих збірників, так і оригінальні авторські. В кожному параграфі задачі розміщені (на думку автора) в порядку зростання складності, за винятком тих випадків, коли на початку параграфа розв'язується загальна задача і виводиться формула, що потім застосовується, і тих випадків, коли параграф складається з декількох самостійних частин (тоді принцип «від легкого до важкого» діє в кожній такій частині).

Багато задач розв'язані не з числами, а з буквами (a, b, p, ...), при цьому, замінивши букви на числа, вчитель отримає багатий дидактичний матеріал.

Автор буде вдячний за надіслані раціональніші розв'язання задач з цієї книги, нові цікаві задачі, поради щодо змісту та оформлення книги.

Загальні правила комбінаторики і поняття факторіала

Розглянемо задачі, які допоможуть вивести два загальних правила комбінаторики.

✔ Задача 1. У першому ящику m пронумерованих кульок, а в другому — r пронумерованих кульок. Випадковим чином вибираємо з якого-небудь ящика одну кульку. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. З першого ящика кульку можна вибрати m різними способами, а з другого — r різними способами. Отже, всього способів $n = m + r$.

Таким чином, загальне правило, яке носить назву **правило суми**, можна сформулювати так:

якщо деякий об'єкт А можна вибрати *m* способами, а об'єкт В — *r* способами (не такими, як об'єкт А), то об'єкт «або А, або В» можна вибрати *m* + *r* способами.

✔ Задача 2. У першому ящику m білих пронумерованих кульок, а в другому — r чорних пронумерованих кульок. Скількома способами можна вибрати пару з однієї білої і однієї чорної кульок?

Розв'язання. З першого ящика білу кульку можна вибрати m різними способами і до кожної обраної кульки можна взяти в пару довільну чорну кульку, що можна зробити r різними способами. Отже, всього способів $n = m \cdot r$.

Узагальнюючи цю задачу, отримаємо **правило добутку**:

якщо деякий об'єкт А можна вибрати *m* способами, а після кожного такого вибору інший об'єкт В можна вибрати (незалежно від вибору об'єкта А) *r* способами, то пару об'єктів А і В можна вибрати *m* · *r* способами.

Дуже важливим в комбінаториці є поняття факторіала.

Означення. ***Факторіал — функція, яка визначена на множині цілих невід'ємних чисел і ставить у відповідність даному числу n добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно, що позначається n!. Отже,*** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$***, причому, за означенням, 0! = 1.***

Розділ 1

Комбінаторика без повторень

✔ Задача 11. Третій доданок розкладу $\left(2x+x^{-2}\right)^{n}$ не містить x. При яких значеннях x цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $\left(1+x^{3}\right)^{30}$?

Розв'язання. Третій доданок розкладу $\left(2x+x^{-2}\right)^{n}$ дорівнює $T_3=C_n^2\cdot\left(x^{-2}\right)^2\cdot(2x)^{n-2}=C_n^2\cdot x^{-4}\cdot 2^{n-2}\cdot x^{n-2}=2^{n-2}\cdot C_n^2\cdot x^{n-6}$.

Тоді $n=6$. Звідси $T_3=2^4\cdot C_6^2=240$. Другий доданок у $\left(1+x^3\right)^{30}$ дорівнює $T_2'=C_{30}^1\cdot\left(x^3\right)^1\cdot 1^{30-1}=30x^3$. Маємо $30x^3=240$, $x=2$.

Вправи

I. Знайти члени, що не містять x, у розкладах (1–7).

1. $\left(\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)^{15}$.
2. $\left(x+\dfrac{1}{x^4}\right)^{10}$.
3. $\left(\sqrt[9]{\dfrac{1}{x^8}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^{7}$.
4. $\left(ax+x^{-\frac{1}{4}}\right)^{n}$, якщо сума біноміальних коефіцієнтів з непарними номерами дорівнює 512.
5. $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^{m}$, якщо коефіцієнти четвертого і тринадцятого членів рівні між собою.
6. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{n}$, якщо сума коефіцієнтів першого, другого та третього членів дорівнює 46.
7. $\left(5x^{-\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{n}$, якщо біноміальні коефіцієнти третього і десятого членів рівні.

II. Розв'язати задачі (8, 9).

8. Знайти показник степеня бінома, якщо другий доданок розкладу $\left(\sqrt[7]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ не залежить від x.
9. Знайти P_n, якщо третій член розкладу $\left(x^{-\frac{2}{3}}+x\right)^{n}$ не залежить від x.

Додаток 2

n	$P_n = n!$	n	$P_n = n!$
1	1	36	$\approx 3{,}719933268 \cdot 10^{41}$
2	2	37	$\approx 1{,}376375309 \cdot 10^{43}$
3	6	38	$\approx 5{,}230226175 \cdot 10^{44}$
4	24	39	$\approx 2{,}039788208 \cdot 10^{46}$
5	120	40	$\approx 8{,}159152832 \cdot 10^{47}$
6	720	41	$\approx 3{,}345252661 \cdot 10^{49}$
7	5040	42	$\approx 1{,}405006118 \cdot 10^{51}$
8	40320	43	$\approx 6{,}041526306 \cdot 10^{52}$
9	362880	44	$\approx 2{,}658271575 \cdot 10^{54}$
10	3628800	45	$\approx 1{,}196222209 \cdot 10^{56}$
11	39916800	46	$\approx 5{,}502622216 \cdot 10^{57}$
12	479001600	47	$\approx 2{,}586232415 \cdot 10^{59}$
13	6227020800	48	$\approx 1{,}241391559 \cdot 10^{61}$
14	87178291200	49	$\approx 6{,}08281864 \cdot 10^{62}$
15	1307674368000	50	$\approx 3{,}04140932 \cdot 10^{64}$
16	20922789888000	51	$\approx 1{,}551118753 \cdot 10^{66}$
17	355687428096000	52	$\approx 8{,}065817517 \cdot 10^{67}$
18	6402373705728000	53	$\approx 4{,}274883284 \cdot 10^{69}$
19	121645100408832000	54	$\approx 2{,}308436973 \cdot 10^{71}$
20	2432902008176640000	55	$\approx 1{,}269640335 \cdot 10^{73}$
21	51090942171709440000	56	$\approx 7{,}109985878 \cdot 10^{74}$
22	1124000727777607680000	57	$\approx 4{,}05269195 \cdot 10^{76}$
23	25852016738884976640000	58	$\approx 2{,}350561331 \cdot 10^{78}$
24	620448401733239439360000	59	$\approx 1{,}386831185 \cdot 10^{80}$
25	15511210043330985984000000	60	$\approx 8{,}320987113 \cdot 10^{81}$
26	403291461126605635584000000	61	$\approx 5{,}075802139 \cdot 10^{83}$
27	10888869450418352160768000000	62	$\approx 3{,}146997326 \cdot 10^{85}$
28	304888344611713860501504000000	63	$\approx 1{,}982608315 \cdot 10^{87}$
29	8841761993739701954543616000000	64	$\approx 1{,}268869322 \cdot 10^{89}$
30	265252859812191058636308480000000	65	$\approx 8{,}247650592 \cdot 10^{90}$
31	8222838654177922817725562880000000	66	$\approx 5{,}443449391 \cdot 10^{92}$
32	263130836933693530167218012160000000	67	$\approx 3{,}647111092 \cdot 10^{94}$
33	$\approx 8{,}683317619 \cdot 10^{36}$	68	$\approx 2{,}480035542 \cdot 10^{96}$
34	$\approx 2{,}95232799 \cdot 10^{38}$	69	$\approx 1{,}711224524 \cdot 10^{98}$
35	$\approx 1{,}033314797 \cdot 10^{40}$	70	$\approx 1{,}197857167 \cdot 10^{100}$

Для досить великих n можна користуватись формулою Стірлінга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Зміст

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

КОМБІНАТОРИКА, БІНОМ НЬЮТОНА
ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ШКОЛІ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 16.03.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 11.39. Умовн. фарбо-відб. 11.39.

Видавництво «Навчальна книга — Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга — Богдан, а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1898-2

9 789661 018982