

О.С. Істер

# МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

## Теорія. Приклади. Вправи

### Книга 1

- ✓ *Алгебраїчні перетворення, рівняння, нерівності, системи*
- ✓ *Тригонометрія*
- ✓ *Логарифми. Логарифмічні і показникові рівняння, нерівності, системи*



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512.1(075.3)

ББК 22.1я72

I-89

*Відповідно до закону України «Про авторські та суміжні права» задачі з книги «Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы» за редакцією М. Сканаві використано як ілюстративний матеріал*

**Істер О.С.**

I-89 **Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 1 / О.С. Істер. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. — 480 с.**

ISBN 978-966-10-3540-8

У посібнику викладено методи розв'язування задач зі шкільного курсу математики. Перша книга посібника містить 40 занять, які охоплюють теми: «Алгебраїчні перетворення, рівняння, нерівності, системи», «Тригонометрія», «Логарифми. Логарифмічні і показникові рівняння, нерівності, системи».

Посібник містить теоретичний матеріал (означення, основні математичні факти, теореми, формули, таблиці), приклади розв'язування завдань та вправи для самостійного виконання, що дозволяє використовувати його, не звертаючись до підручників.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх класів, класів та шкіл із поглибленим вивченням математики.

УДК 512.1(075.3)

ББК 22.1я72

---

*Навчальне видання*

ІСТЕР Олександр Семенович

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ.**

**ТЕОРІЯ. ПРИКЛАДИ. ВПРАВИ**

**Книга 1**

Підписано до друку 18.11.2013. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 28,5. Умовн. фарбо-відб. 28,5.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців

ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48

E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com

www.bohdan-books.com

*Охороняється законом про авторське право.*

*Жодна частина цього видання не може бути відтворена*

*в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)

ISBN 978-966-10-3540-8

© Навчальна книга – Богдан, 2014

## Передмова

У пропонованому посібнику викладені методи розв'язування задач зі шкільного курсу математики.

Мета посібника — допомогти учням старших класів та абітурієнтам систематизувати свої знання, а також ознайомитися з деякими методами розв'язування задач, яким у школі з тих чи інших причин не приділяється достатньо уваги. Так, наприклад, набагато ширше, ніж у шкільних підручниках, викладено такі питання, як розв'язування рівнянь вищих степенів, тригонометричних та логарифмічних рівнянь, систем рівнянь, задачі на комбінації просторових тіл та багато інших питань.

Посібник буде корисним як учням загальноосвітніх класів, так і учням класів та шкіл із поглибленим вивченням математики. Завдяки набутим знанням наполегливий читач не тільки відмінно складе державну підсумкову атестацію (ДПА) та зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО), а й «закладе фундамент» для успішного навчання у вищому навчальному закладі.

Пропонований посібник стане у пригоді вчителям як під час індивідуальних, так і під час групових занять, дозволить не тільки провести системне повторення шкільного матеріалу, а й розглянути, у разі необхідності, окремі теми чи розділи.

Посібник містить теоретичний матеріал (означення, основні математичні факти, теореми, формули, таблиці), приклади розв'язування завдань та вправи для самостійного виконання. Така структура посібника дозволяє використовувати його, не звертаючись до підручників.

## Як працювати з посібником

Посібник складається із занять, які повністю охоплюють теми: «Алгебраїчні перетворення, рівняння, нерівності, системи», «Тригонометрія», «Логарифми. Логарифмічні і показникові рівняння, нерівності, системи». Цих занять — 40. Кожне заняття має підпункти. У кожному підпункті детально викладено один з методів розв'язування певного класу або типу задач. Зазвичай, на початку кожного підпункту подано короткий теоретичний матеріал (означення, основні теореми і формули), який необхідно знати для розв'язування задач. Потім наведено конкретні приклади з використанням цього методу (формули, факти тощо). Весь задачний матеріал узятो із найпопулярнішого протягом останніх сорока років збірника задач для вступників до вищих навчальних закладів за редакцією М.І. Сканаві (Київ, «Каннон», 1997 р.). Тому кожна задача має потрібну нумерацію: перше число позначає номер заняття, друге — порядковий номер задачі в цьому занятті, третє (в дужках) — його номер у шостому виданні збірника Сканаві і групу складності (А, Б чи В). У кожному занятті є 10–15 вправ для самостійного розв'язування, відповіді до яких подано наприкінці книги.

Працюючи з книгою, читач може або вивчати увесь пропонований матеріал, або вивчати лише ті розділи, які він вважає найскладнішими (наприклад, у випадку дефіциту часу на підготовку до ДПА чи ЗНО).

\* \* \*

Читачі, які використовують іншу систему підготовки (наприклад, працюють з репетитором), можуть використовувати книгу як довідковий посібник. Для цього наприкінці книги подано зміст-класифікатор, що дає змогу читачеві швидко знайти метод, який його цікавить.

Також у додатку подано відповідність між номерами розв'язаних задач (за принципом: ліворуч — номер у збірнику Сканаві, праворуч — номер у цій книзі).

# Розділ 1. Алгебраїчні перетворення, рівняння, нерівності, системи

## Заняття 1

### Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів

#### 1. Тотожні перетворення раціональних виразів.

##### Основні формули

I. Дії над степенями.

Для будь-яких  $x$  та  $y$ ,  $a > 0$  та  $b > 0$ , правильності рівності:

$$a^0 = 1 \quad (ab)^x = a^x b^x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

II. Формули скороченого множення.

Для будь-яких  $a$  і  $b$  правильні рівності:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

III. Якщо  $x_1$  та  $x_2$  – корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

#### Задача 1.1 (2.286-Б).

При якому значенні  $k$  многочлен  $x^2 + 2(k-9)x + (k^2 + 3k + 4)$  можна подати у вигляді повного квадрата?

**Розв'язання.** Знайдемо таке значення  $k$ , що

$$x^2 + 2(k-9)x + (k^2 + 3k + 4) = (x+b)^2. \quad (*)$$

Оскільки  $(x+b)^2 = x^2 + 2xb + b^2$ , то  $(*)$  виконується у випадку  $k-9 = b$  і  $k^2 + 3k + 4 = b^2$ . Звідси  $(k-9)^2 = k^2 + 3k + 4$ ,  $k = \frac{11}{3}$ .

**Відповідь:**  $k = \frac{11}{3}$ .

### Задача 1.2 (2.289-Б).

Многочлен  $x^8 - 16$  подати у вигляді добутку многочленів другого степеня.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } x^8 - 16 &= (x^4 - 4)(x^4 + 4) = \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) \left( (x^2)^2 + 2x^2 \cdot 2 + 2^2 - 4x^2 \right) = \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) \left( (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \right) = \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ .

### Задача 1.3 (2.306-Б).

Число 19 подати у вигляді різниці кубів натуральних чисел. Показати, що таке подання єдине.

**Розв'язання.** Нехай  $m \in N$ ,  $n \in N$  і  $m^3 - n^3 = 19$ . Тоді

$$19 = (m-n)(m^2 + mn + n^2). \quad (*)$$

Оскільки  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ , то  $m^2 + mn + n^2 \geq 3$ . Зазначимо, що множники  $m^2 + mn + n^2$  і  $m - n$  – натуральні числа і 19 – просте число. Тоді єдина можливість виконання рівності  $(*)$  така :

$$\begin{aligned} m-n &= 1 \text{ і } m^2 + mn + n^2 = 19. \\ \text{Маємо систему } \begin{cases} m = 1+n; \\ (1+n)^2 + (1+n)n + n^2 = 19. \end{cases} \end{aligned}$$

Звідси  $m_1 = 3$ ;  $n_1 = 2$  або  $m_2 = -2$ ;  $n_2 = -3$ . Друга пара не підходить, оскільки  $m$  і  $n$  – натуральні числа. Отже,  $19 = 3^3 - 2^3$ ; подання єдине.

**Відповідь:**  $19 = 3^3 - 2^3$ .

**Задача 1.4 (2.307-Б).**

Перетворити суму  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

до найпростішого вигляду.

**Розв'язання.** Зазначимо, що для будь-якого  $n$  дріб  $\frac{1}{n(n+1)}$

подається у вигляді  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Тоді } & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ & = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\frac{n}{n+1}$ .

**Задача 1.5 (2.309-Б).**

Довести, що якщо  $a+b=1$ , то  $\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$ .

**Розв'язання.** Перетворюючи ліву частину, намагатимемося одержати суму  $a+b$ , замінивши її потім на 1. Під час перетворень використаємо також формулу  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ .

$$\begin{aligned} \text{Маємо } & \frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{a^4 - a - b^4 + b}{(a^3-1)(b^3-1)} = \\ & = \frac{(a^4 - b^4) - (a-b)}{a^3b^3 - (a^3+b^3) + 1} = \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - (a-b)}{a^3b^3 - (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 1} = \\ & = \frac{(a-b)((a+b)^2 - 2ab - 1)}{a^3b^3 - ((a+b)^2 - 3ab) + 1} = \frac{-2ab(a-b)}{a^3b^3 + 3ab} = \\ & = \frac{2ab(b-a)}{ab(a^2b^2+3)} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}. \text{ Умовну рівність доведено.} \end{aligned}$$

**Вправи**

**1.6 (2.018-А).** Спростити вираз

$$\left( \frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} (5-2x^2)$$

та обчислити при  $x = \sqrt{3,92}$ .

**1.7 (2.060-А).** Спростити вираз

$$\left( \frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y} \right) : \frac{y^2}{4x^2 - y^2}.$$

**1.8 (2.156-А).** Обчислити суму кубів двох чисел, якщо їх сума і добуток відповідно дорівнюють 11 і 21.

**1.9 (2.308-Б).** Показати, що

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}.$$

## 2. Тотожні перетворення ірраціональних виразів.

### Основні формули

I. Для будь-яких натуральних  $n$  і  $m$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ , і будь-яких  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  правильні такі рівності:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} & (\sqrt[n]{a})^n &= a & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b \neq 0) & (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} & \sqrt[n]{a} &= \sqrt[mn]{a^m} \end{aligned}$$

II. Для будь-якого натурального  $n$  та будь-яких  $a$  та  $b$  правильні такі рівності:

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{a^{2n}} &= |a| & \sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases} \\ \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} &= a & \sqrt[2n+1]{-a} &= -\sqrt[2n+1]{a} \end{aligned}$$

$$\sqrt[2n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b}, & \text{якщо } a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt[2n]{-a} \cdot \sqrt[2n]{-b}, & \text{якщо } a \leq 0, b \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}, & \text{якщо } a \geq 0, b > 0 \\ \frac{\sqrt[2n]{-a}}{\sqrt[2n]{-b}}, & \text{якщо } a \leq 0, b < 0 \end{cases}$$



## Розділ 2. Тригонометрія

### Основні формули

1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha &= 1 & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

2. Формули зведення.

Назва функції не змінюється					
$x$	$-\alpha$	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Назва функції змінюється				
$x$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

3. Формули додавання.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha} \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

4. Формули подвійного аргументу.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

5. Формули половинного аргументу.

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Ці три формули можна також розглядати як формули зниження степеня!

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

6. Формули перетворення суми на добуток.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

7. Формули перетворення добутку на суму.

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

8. Універсальна тригонометрична підстановка (формули, що виражають  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  через  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ).

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

## Заняття 20

### Обчислення значень тригонометричних функцій

#### 1. Доведення числових тригонометричних тотожностей.

Задача 20.1 (3.342-Б).

Довести справедливість рівності

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} & \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \\ & = \cos(90^\circ - 10^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(90^\circ - 50^\circ) \cos(90^\circ - 70^\circ) = \\ & = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ. \end{aligned}$$

Зазначимо, що аргументи становлять геометричну прогресію із знаменником 2. Помножимо і поділимо на  $2^3 \sin 20^\circ$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{2^3 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \cdot 2^3 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{2^2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{16 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

**Задача 20.2 (3.353-Б).**

Довести справедливість рівності  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$ .

*Розв'язання.*

$$A = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ &= 2 \left( \frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ \right) = \\ &= 2 (\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ) = 2 \sin(30^\circ - 10^\circ) = \\ &= 2 \sin 20^\circ, \text{ а } \sin 10^\circ \cos 10^\circ = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2} = \frac{\sin 20^\circ}{2}, \end{aligned}$$

то

$$A = \frac{2 \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4, \text{ що й треба було довести.}$$

**Задача 20.3 (3.354-Б).**

Довести справедливість рівності  $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } A &= \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) - \sin 18^\circ = \\ &= \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2 \sin \frac{54^\circ - 18^\circ}{2} \cos \frac{54^\circ + 18^\circ}{2} = \end{aligned}$$

## Додатки

### *Відповідність між номерами розв'язаних задач*

Зліва — номер у збірнику задач за редакцією М.І. Сканаві, справа — номер у цій книжці, розділи і групи наведено відповідно до збірника Сканаві

#### Розділ 2

Група А		Група Б		Група В	
2.002	1.10	2.162	2.13	2.319	2.17
2.027	1.11	2.164	1.16	2.320	2.18
2.126	2.1	2.173	2.14	2.333	2.19
2.132	2.2	2.191	1.17	2.342	2.20
2.138	2.3	2.230	2.5	2.352	1.18
2.143	1.12	2.236	2.15	2.356	2.21
2.146	2.4	2.285	2.16	2.360	1.19
2.152	1.13	2.286	1.1		
2.153	1.14	2.289	1.2		
2.154	1.15	2.291	2.6		
		2.306	1.3		
		2.307	1.4		
		2.309	1.5		

#### Розділ 3

Група А		Група Б		Група В	
3.048	21.1	3.189	21.2	3.402	21.6
3.075	21.16	3.221	21.3	3.403	21.7
3.153	20.13	3.226	21.4	3.408	21.8
3.162	20.19	3.230	21.5	3.410	21.19
3.175	20.20	3.241	22.13	3.423	20.4
3.179	20.21	3.278	22.14	3.424	20.5
3.181	21.32	3.288	21.17	3.430	22.18
3.184	20.14	3.306	22.15	3.434	22.19
3.185	20.22	3.342	20.1	3.441	22.20
		3.353	20.2	3.445	22.21
		3.354	20.3	3.448	22.22
		3.360	20.15	3.467	20.26
		3.364	20.23	3.470	22.4
		3.368	22.1	3.473	22.5

Група А		Група Б		Група В	
		9,187	40.19	9.276	30.25
		9.192	18.12	9.277	30.26
		9.199	40.3	9.281	40.30
		9.205	17.5	9.282	18.21
		9.207	30.20	9.286*	30.8
		9.208	18.4	9.287*	30.15
		9.211	18.24	9.291	30.1
		9.213	19.6	9.292*	30.16
		9.215	17.15	9.294*	30.2
				9.297*	30.9
				9.302	39.22
				9.304	40.31

## Розділ 14

14.080	19.18	14.099	30.5	14.206	16.1
14.083	19.1	14.114	16.9	14.237*	16.28

## Відповіді до вправ

## Заняття 1.

- 1.6.  $\frac{4-x^2}{2}$ ; 0,04. 1.7.  $\frac{24}{5y-2x}$ . 1.8. 638. 1.20.  $\sqrt[m]{y}$ . 1.21.  $a-b$ ; 1.  
 1.22.  $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$ . 1.23.  $-3n(m+p)$ . 1.24.  $-\frac{1}{1+a+a^2}$ . 1.25. 0. 1.26.  $\frac{a}{a+1}$ .  
 1.27.  $\frac{m}{2}$ . 1.28. 1 при  $a > 0$ ,  $-\sqrt[6]{a} \leq b < \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a}}$ .

## Заняття 2.

- 2.7. 1. 2.9. 0,2. 2.10.  $-\frac{(5+3\sqrt{3})(4+3\sqrt{2})}{2}$ . 2.11.  $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-30}{2}$ .  
 2.12. 1. 2.22.  $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ , якщо  $-1 < a < 1$ ;  $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ , якщо  $a > 1$ . 2.23. 1,  
 якщо  $x > 2$ ;  $-1$ , якщо  $1 \leq x < 2$ . 2.24. 2, якщо  $x < -1$ ;  $\frac{2x^2}{2x^2-1}$ , якщо  
 $x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ ; 0, якщо  $x > 1$ . 2.25.  $-1$ ,  
 якщо  $x < -1$ ;  $\frac{-x^3+x+2}{x^3+x}$ , якщо  $x \in [-1; 0) \cup (0; 1)$ ; 1, якщо  $x \geq 1$ .

## Зміст-класифікатор

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Передмова				3
<b>Розділ 1. Алгебраїчні перетворення, рівняння, нерівності, системи</b>				5
Заняття 1. Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів				5
1	Тотожні перетворення раціональних виразів.	2.286; 2.289; 2.306; 2.307; 2.309	2.018; 2.060; 2.156; 2.308	5
2	Тотожні перетворення ірраціональних виразів.	2.002; 2.027; 2.143; 2.152; 2.153; 2.154; 2.164; 2.191; 2.352; 2.360	2.015; 2.025; 2.026; 2.036; 2.041; 2.136; 2.192; 2.216; 2.334	8
Заняття 2. Перетворення ірраціональних виразів і виразів з модулем				16
1	Тотожне перетворення ірраціональних числових виразів.	2.126; 2.132; 2.138; 2.146; 2.230; 2.291	2.073; 2.134; 2.140; 2.148; 2.149; 2.204	16

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Тотожні перетворення виразів з модулем .	2.162; 2.173; 2.236; 2.285; 2.319; 2.320; 2.333; 2.342; 2.356	2.158; 2.175; 2.196; 2.313; 2.315; 2.322; 2.335	21
Заняття 3. Раціональні рівняння. Метод перетворень і метод заміни змінних. Раціональні рівняння з параметром				31
1	Метод перетворень.	6.014; 6.180	6.001	31
2	Метод заміни змінної (метод підстановки).	6.003; 6.138; 6.140; 6.143; 6.144; 6.147; 6.148	6.004; 6.005; 6.010; 6.016; 6.018; 6.019; 6.024; 6.141; 6.149; 6.154	32
3	Раціональні рівняння з параметром .	6.002; 6.009; 6.020; 6.025; 6.026; 6.028	6.006; 6.007	37



№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 4 . Ірраціональні рівняння. Метод заміни змінної				41
1	Ірраціональні рівняння, які зводяться до квадратних заміною змінної (підстановкою).	6.046; 6.047; 6.048; 6.053; 6.055; 6.059; 6.161; 6.162; 6.163; 6.165; 6.277	6.039; 6.042; 6.043; 6.044; 6.049; 6.058; 6.061; 6.066; 6.166; 6.278	41
2	Дві підстановки в ірраціональному рівнянні.	6.160; 6.279; 6.296	6.284; 6.294	46
Заняття 5. Раціональні рівняння вищих степенів				49
1	Використання теореми Безу та її наслідків.	6.137; 6.264; 6.268	6.150; 6.174; 6.275; 6.276; 6.289; 6.295; 6.302	49
2	Спосіб групування з метою розкладання на множники.	6.021; 6.146; 6.155; 6.176; 6.257; 6.266; 6.267; 6.273; 6.287; 6.291	6.012; 6.136; 6.258; 6.259; 6.261; 6.265	52

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 6. Розв'язування раціональних рівнянь різними методами				57
1	Метод перетворень дробово-раціональних рівнянь.	6.011; 6.017; 6.029; 6.151; 6.152	6.008; 6.013; 6.015; 6.023	57
2	Рівняння виду $(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} = m$ ; $(x+a)^{2n-1} - (x+b)^{2n-1} = m$ , де $n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ .	6.263	6.256	62
3	Рівняння виду $(x+a)^{2n-1} \pm (x+b)^{2n-1} = f(x)$ , де $n \in \mathbb{N}$ .	6.153; 6.260	6.022; 6.139	63
4	Підстановки $bx = t$ і $x = \frac{1}{t}$ в незведених рівняннях з метою одержання зведених.	6.270	6.272	64
5	Використання теореми Вієта для кубічного рівняння.	6.142		65
6	Спосіб доповнення до повного квадрата.	6.274		65
7	Розв'язування рівняння відносно параметра.	6.269		66
Заняття 7. Розв'язування ірраціональних рівнянь різними методами				67
1	Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ .	6.034		67

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Рівняння виду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ , де $a$ – число.	6.032; 6.170	6.036; 6.056; 6.057; 6.168	67
3	Рівняння виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$ .	6.064; 6.167; 6.173; 6.292	6.051; 6.062	69
4	Рівняння виду $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{\varphi(x)}$ .	6.037; 6.181; 6.281	6.040; 6.041; 6.158; 6.171; 6.175	71
5	Інші ірраціональні рівняння.	6.035; 6.052; 6.063; 6.159	6.045; 6.050; 6.177	74
Заняття 8. Розв'язування алгебраїчних рівнянь різними методами				76
1	Однорідні рівняння і рівняння, що зводяться до однорідних.	6.156; 6.157; 6.288	6.271; 6.301	76
2	Рівняння з модулями.	6.164; 6.182; 6.290	6.179	79
3	Використання різних перетворень.	6.172; 6.283; 6.293	6.030; 6.038; 6.145	81
4	Похідні пропорції.	6.027	6.178	83
5	Використання властивостей функцій.	6.169; 6.300	6.280	84

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 9. Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь методом підстановки				85
1	Підстановка змінної.	6.072; 6.094; 6.195; 6.219; 6.221; 6.306; 6.317	6.082; 6.092; 6.093; 6.199; 6.214	85
2	Часткова підстановка (підстановка “куска”).	6.078; 6.104; 6.207; 6.213; 6.305	6.071; 6.086; 6.088; 6.100; 6.110; 6.323	90
Заняття 10. Використання теорем, обернених до теореми Вієта. Системи симетричних раціональних рівнянь				95
1	Використання теореми, оберненої до теореми Вієта для квадратного рівняння.	6.068; 6.074; 6.089; 6.325	6.077; 6.079	95
2	Використання теореми, оберненої до теореми Вієта для кубічного рівняння.	6.309; 6.314; 6.332	6.202; 6.307; 6.312	97
3	Системи симетричних раціональних рівнянь (ССРР).	6.085; 6.206; 6.311; 6.319; 6.320	6.069; 6.075; 6.183; 6.187; 6.196; 6.210; 6.217; 6.324	100

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 11. Метод заміни змінних				104
1	Заміна змінних у системах раціональних рівнянь.	6.067; 6.083; 6.205; 6.310; 6.322	6.070; 6.084; 6.200; 6.201; 6.204; 6.321	104
2	Заміна змінних у системах, що містять ірраціональні рівняння.	6.119; 6.223; 6.329; 6.333; 6.335; 6.337; 6.340	6.101; 6.102; 6.103; 6.108; 6.116; 6.222; 6.242; 6.243	109
Заняття 12 . Лінійні перетворення систем. Кругові системи і системи, що зводяться до кругових				115
1	Системи рівнянь типу “дати-відняти”.	6.118; 6.215; 6.318	6.080	115
2	Метод почленного додавання (віднімання).	6.073; 6.192; 6.193; 6.208; 6.211; 6.218	6.081; 6.097; 6.098; 6.189; 6.194; 6.209	118
3	Кругові системи і системи, що зводяться до кругових.	6.190; 6.212; 6.308; 6.316	6.095; 6.224; 6.227; 6.304	122

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 13 . Системи, що містять ірраціональні рівняння				126
1	Метод піднесення до відповідного степеня.	6.099; 6.109; 6.236; 6.331	6.231; 6.233; 6.235; 6.336	126
2	Системи, що містять симетричні ірраціональні рівняння.	6.106; 6.111; 6.228; 6.234	6.112; 6.107; 6.115; 6.225	130
3	Метод почленного множення (ділення).	6.232; 6.341	6.114	133
4	Комбінація різних методів.	6.226; 6.339	6.240; 6.241	136
Заняття 14 . Розв'язування алгебраїчних систем різними методами				138
1	Системи рівнянь, ліві частини яких – однорідні многочлени.	6.087; 6.185; 6.313	6.184; 6.315	138
2	Метод розкладання на множники.	6.191; 6.338	6.197; 6.216; 6.229	141
3	Метод почленного ділення.	6.076; 6.220	6.091; 6.096	143
4	Системи з модулем.	6.239	6.105; 6.238	145
5	Системи з параметрами.	6.113; 6.198	6.090; 6.117	145
6	Оцінка області значень.	6.327; 6.334		147

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 15. Задачі з коренями квадратного і кубічного рівнянь				148
1	Спільний корінь двох рівнянь.	6.250	6.127; 6.129	148
2	Використання теореми Вієта для знаходження симетричних многочленів від коренів рівняння.	6.120; 6.346	6.133	149
3	Складання рівнянь із заданими коренями.	6.121; 6.246; 6.343	6.122; 6.123; 6.253; 6.254; 6.350	150
4	Параметр і корені квадратного рівняння.	6.124; 6.126; 6.249; 6.251; 6.252	6.125; 6.131	152
5	Використання теореми Вієта для знаходження коренів кубічного рівняння.	6.357	6.348	155
Заняття 16 . Доведення нерівностей				156
1	Доведення нерівностей, права частина яких дорівнює нулю.	14.206	9.007; 9.108	156
2	Розгляд різниці лівої і правої частини.	9.006; 9.097; 9.121; 9.228; 9.229; 14.114	9.001; 9.004	157

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
3	Використання нерівності Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним .	9.002; 9.096; 9.221; 9.227; 9.232	9.003; 9.009; 9.230; 9.235; 14.109	160
4	Умовні нерівності.	9.107	9.106; 14.165	162
5	Нерівності в трикутнику.	9.005	14.11; 14.113	163
6	Метод математичної індукції.	14.237*	14.238*	164
Заняття 17. Розв'язування раціональних нерівностей				164
1	Метод інтервалів.	9.010; 9.072; 9.136; 9.148; 9.205	9.029; 9.079; 9.119; 9.149; 9.169	164
2	Системи раціональних нерівностей.	9.011	9.034; 9.210	168
3	Знаходження області визначення функції.	9.110; 9.215	9.016; 9.020	169
4	Нерівності з параметром.	9.139		170
5	Виконання нерівності при всіх значеннях змінної .	9.099; 9.104; 9.117; 9.222	9.015; 9.226	171
6	Розміщення коренів квадратного тричлена.	9.008; 9.103	9.101; 9.102	174
Заняття 18. Ірраціональні нерівності				178
1	Використання $\sqrt{f(x)} \geq 0$ .	9.040	9.044; 14.327	177



№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$ , $n \in \mathbb{N}$ .	9.208	9.013	178
3	Нерівності виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ і такі, що зводяться до них.	9.028; 9.043; 9.257	9.045; 14.097; 14.396	178
4	Нерівності виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ і такі, що зводяться до них.	9.192; 9.258	9.151	180
5	Нерівності виду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} > a$ ( $a < a$ ), $a$ – число.	9.220	9.218	181
6	Нерівність виду $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > \sqrt{\varphi(x)}$ ( $< \sqrt{\varphi(x)}$ ).	9.143	9.188	183
7	Заміна змінних в ірраціональних нерівностях.	9.140; 9.180; 9.282	9.168	184
8	Метод інтервалів.	9.172		186
9	Системи ірраціональних нерівностей.	9.211		187
Заняття 19. Нерівності з модулями				187
1	Використання $ f(x)  + a > 0$ , де $a > 0$ .	14.083		187
2	Нерівність виду $ f(x)  >  g(x) $ .	9.122; 9.133	14.380	188
3	Нерівність виду $ f(x)  < g(x)$ .	9.033; 9.213	9.130; 9.142; 9.214	189

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
4	Нерівності виду $ f(x)  > g(x)$ .	9.032; 9.138; 9.179; 9.250; 9.259	9.105; 9.260; 14.084	190
5	Нерівності виду $ax^2 + b x  + c > 0 (< 0)$ .	14.080	14.081; 9.275	193
6	Нерівності, що розв'язуються розкриванням модуля.	9.251; 9.256	14.082; 14.085	194
<b>Розділ 2. Тригонометрія</b>				196
Заняття 20 . Обчислення значень тригонометричних функцій				198
1	Доведення числових тригонометричних тотожностей.	3.342; 3.353; 3.354; 3.423; 3.424	3.149; 3.150; 3.336; 3.338; 3.341; 3.418; 3.428	198
2	Обчислення числових тригонометричних виразів .	3.153; 3.184; 3.360	3.154; 3.157; 3.355	201
3	Обчислення значень тригонометричних функцій за відомими значеннями інших тригонометричних функцій.	3.162; 3.175; 3.179; 3.185; 3.364; 3.392; 3.394; 3.467	3.160; 3.171; 3.365; 3.466	203

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 21. Тотожні перетворення тригонометричних виразів				208
1	Доведення тригонометричних тотожностей.	3.048; 3.189; 3.221; 3.226; 3.230; 3.402; 3.403; 3.408	3.013; 3.051; 3.186; 3.391; 3.396	208
2	Доведення умовних тригонометричних тотожностей.	3.385	3.183	212
3	Спрощення тригонометричних виразів.	3.075; 3.288; 3.388; 3.410	3.080; 3.244; 3.312; 3.316; 3.412; 3.180; 3.115; 3.285	213
4	Знаходження найбільших і найменших значень тригонометричних виразів без застосування похідної.	3.482; 3.490	3.481; 3.486	215
5	Вилучення $\alpha$ із рівностей .	3.181		217
Заняття 22 . Доведення тригонометричних тотожностей і нерівностей у трикутнику. Спрощення тригонометричних виразів з модулем. Обчислення виразів, що містять обернені тригонометричні функції				217
1	Доведення тригонометричних тотожностей для кутів трикутника.	3.368; 3.371; 3.374; 3.470; 3.473	3.168; 3.369; 3.370; 3.372; 3.373	217

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Доведення тригонометричних нерівностей для кутів трикутника .	3.496	3.499	220
3	Спрощення тригонометричних виразів з модулем.	3.241; 3.278; 3.306	3.275; 3.291	221
4	Обчислення виразів, що містять обернені тригонометричні функції .	3.430; 3.434; 3.441; 3.445; 3.448	3.156; 3.284; 3.429; 3.447	223
Заняття 23 . Тригонометричні рівняння, що зводяться до найпростіших у результаті тригонометричних перетворень				228
1	Найпростіші тригонометричні рівняння.			228
2	Тригонометричні рівняння, що зводяться до найпростіших .	8.005; 8.037; 8.047; 8.140; 8.181; 8.187; 8.188; 8.198; 8.270; 8.353; 8.436; 8.447	8.003; 8.010; 8.011; 8.017; 8.018; 8.036; 8.063; 8.186; 8.200; 8.210; 8.262	228

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 24. Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою заміни змінної				238
1	Розв'язування тригонометричного рівняння за допомогою перетворення його в алгебраїчне відносно однієї тригонометричної функції.	8.038; 8.194; 8.231; 8.426; 8.441; 8.442	8.002; 8.004; 8.050; 8.055; 8.102; 8.105; 8.213; 8.432	238
2	Заміна $t = \sin x \pm \cos x$ .	8.271; 8.443	8.117; 8.358	242
3	Інші заміни змінних.	8.030; 8.419; 8.439	8.197; 8.417; 8.453; 8.467	244
4	Дві підстановки в ірраціональному тригонометричному рівнянні.	8.418; 8.422	8.415; 8.427	246
Заняття 25. Розв'язування рівнянь за допомогою універсальної тригонометричної підстановки. Однорідні тригонометричні рівняння				248
1	Розв'язування рівнянь за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.	8.042; 8.244; 8.288; 8.334; 8.347; 8.391	8.192; 8.201; 8.281; 8.327; 8.365; 8.376	248
2	Однорідні тригонометричні рівняння	8.008; 8.022; 8.077; 8.176; 8.183; 8.388; 8.424; 8.429	8.039; 8.097; 8.203; 8.205; 8.299; 8.410; 8.476	252

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 26. Розв'язування тригонометричних рівнянь різними методами				259
1	Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою перетворення суми функції на добуток.	8.024; 8.182; 8.184; 8.227; 8.247; 8.255; 8.440; 8.454	8.020; 8.025; 8.031; 8.054; 8.268; 8.430	259
2	Розв'язування тригонометричних рівнянь з використанням формул перетворення добутку функцій на суму	8.034; 8.027	8.019; 8.211	267
3	Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники.	8.100; 8.185; 8.239; 8.408	8.013; 8.196; 8.234; 8.414	269
Заняття 27. Розв'язування тригонометричних рівнянь різними методами				272
1	Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою додаткового кута	8.001; 8.043; 8.324; 8.489	8.065; 8.111; 8.125; 8.156	272
2	Оцінка області значень лівої і правої частин.	8.263; 8.350; 8.406; 8.420; 8.448; 8.457	8.287; 8.320; 8.437; 8.463; 8.479	276

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка.
		задач	вправ	
3	Тригонометричні рівняння з модулем.	8.416; 8.428; 8.458	8.455; 8.470; 8.478	280
Заняття 28 . Розв'язування тригонометричних рівнянь різними методами				284
1	Рівняння, при розв'язуванні яких застосовуються формули зниження степеня.	8.015; 8.435	8.120; 8.122; 8.488	284
2	Рівняння, при розв'язуванні яких застосовують формули потрійного аргументу.	8.216	8.049	286
3	Тригонометричні рівняння з параметром.	8.163; 8.371; 8.373; 8.374	8.372; 8.375	287
4	Тригонометричні рівняння з ірраціональністю.	8.370; 8.411	8.421	290
5	Комбіновані рівняння: тригонометрія + прогресії.	8.393; 8.407	8.409; 8.451	291
6	Показниково-тригонометричні рівняння .	8.377; 8.378	8.379; 8.381	294
7	Логарифмо-тригонометричні рівняння .	8.383; 8.491	8.384	295

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
Заняття 29. Системи тригонометричних рівнянь				296
1	Одне із рівнянь системи – лінійне. Метод підстановки .	8.396		296
2	Одне з рівнянь системи – лінійне: не квапитися з підстановкою .	8.398; 8.399	8.404; 8.405	297
3	Системи типу “додати-відняти”.	8.403; 8.494	8.397	300
4	Метод заміни змінних.	8.395; 8.496	8.394; 8.401; 8.402	303
5	Метод піднесення до квадрата.	8.495; 8.499	8.400	306
6	Метод розкладання на множники одного з рівнянь.	8.497		311
7	Оцінка області значень лівої і правої частин.	8.498		312
8	Допомагає теорема синусів	8.500		313
Заняття 30 . Тригонометричні нерівності				314
1	Доведення тригонометричних нерівностей.	9.291; 9.294*	9.293; 9.299	314
2	Найпростіші тригонометричні нерівності та нерівності, що зводяться до найпростіших.	14.099; 9.146; 9.147; 9.286*; 9.297*	14.100; 9.145; 9.288*;9.295*	315



№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
3	Розв'язування тригонометричних нерівностей за допомогою заміни змінної.	9.217; 9.287*; 9.292*	9.191; 9.289*; 9.296	321
4	Комбіновані нерівності та системи нерівностей.	9.207; 9.239; 9.241	9.134; 9.240	325
5	Розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.	9.276; 9.277	9.285*; 9.290*	327
<b>Розділ 3. Логарифми. Логарифмічні та показникові рівняння, нерівності, системи</b>				332
Заняття 31. Тотожні перетворення виразів, що містять логарифми і показникові вирази				334
1	Обчислення числових значень виразів, що містять логарифми .	7.002; 7.004; 7.009	7.001; 7.005	334
2	Обчислення логарифмічних і показникових виразів, якщо дано значення інших виразів .	7.016; 7.018; 7.161	7.157; 7.163	336
3	Доведення тотожностей .	7.159; 7.302	7.162; 7.304	337
4	Доведення умовних тотожностей. Залежність між змінними.	7.017; 7.019; 7.158	7.164	338

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
5	Спрощення виразів, що містять логарифми .	7.011; 7.151; 7.152; 7.155; 7.298; 7.303	7.010; 7.013; 7.150; 7.153; 7.305	339
6	Порівняння двох логарифмів .	7.300		343
Заняття 32. Показникові рівняння				344
1	Рівняння виду $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1$	7.060; 7.065; 7.308	7.062; 7.198	344
2	Рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 1, a \neq 0$ .	7.087; 7.197	7.063; 7.122	346
3	Рівняння виду $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)} + C = 0;$ $a > 0, a \neq 1$ .	7.071; 7.215	7.078; 7.209	347
4	Рівняння виду $Aa^{f(x)} + Ba^{-f(x)} = C,$ $a > 0, a \neq 1$ .	7.210	7.219	348
5	Заміна $a^{f(x)} = t$ у різних рівняннях.	7.216; 7.229	7.084; 7.224	348
6	Рівняння виду $A_1 a^{f(x)+k_1} + A_2 a^{f(x)+k_2} +$ $+ \dots + A_n a^{f(x)+k_n} =$ $= B_1 b^{f(x)+l_1} + B_2 b^{f(x)+l_2} +$ $+ \dots + B_m b^{f(x)+l_m}.$	7.068; 7.165	7.057; 7.109	349
7	Показникові рівняння зі взаємно оберненими основами .	7.217; 7.330		350

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
8	Рівняння виду $a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = M$ .	7.243		351
9	Однорідні показникові рівняння другого степеня.	7.072; 7.301	7.214; 7.220; 7.222	352
10	Параметр у показниковому рівнянні .	7.249; 7.258		353
Заняття 33 . Найпростіші логарифмічні рівняння і рівняння, що зводяться до них				354
1	Рівняння виду $\log_a f(x) = b$ , де $a > 0, a \neq 1$ .	7.045; 7.092; 7.098; 7.190	7.046; 7.053; 7.175	354
2	Рівняння виду $\log_{g(x)} f(x) = b$ .	7.230; 7.245; 7.327	7.023; 7.225	357
3	Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$ ; $a > 0, a \neq 1$ .	7.036; 7.121; 7.177; 7.223	7.055; 7.110; 7.186	358
4	Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , $a > 0, a \neq 1$ .	7.027; 7.051; 7.241	7.025; 7.049; 7.101	360
5	Рівняння виду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ .	7.314		362
Заняття 34. Розв'язування логарифмічних рівнянь різними методами				363
1	Метод заміни змінних у рівняннях виду $f(\log_a x) = 0$ і подібних до них.	7.107; 7.172; 7.188; 7.240; 7.331	7.040; 7.115; 7.173; 7.237	363

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Використання формули $\log_a f(x) = \frac{1}{\alpha} \log_a f(x)$ для зведення кількох логарифмів до однієї основи.	7.022; 7.178; 7.231; 7.333	7.052; 7.093; 7.191	365
3	Використання формули $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ .	7.079; 7.181; 7.187; 7.168; 7.313	7.080; 7.194; 7.195; 7.200; 7.317	367
4	Використання формули $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ .	7.228		370
Заняття 35. Розв'язування логарифмічних рівнянь різними методами				370
1	Використання формули переходу до іншої основи.	7.202; 7.203; 7.310	7.044; 7.212	370
2	Метод логарифмування.	7.033; 7.083; 7.174; 7.234	7.082; 7.086; 7.125	372
3	Логарифмічні рівняння з радикалами.	7.166; 7.167; 7.332	7.058; 7.170	374
4	Логарифмічні рівняння з модулем.	7.213	7.329	376
5	Спосіб розкладання на множники.	7.248		377

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
6	Логарифмічні рівняння з параметром.	7.179; 7.189; 7.323; 7.306; 7.316; 7.320	7.095; 7.184; 7.318; 7.322; 7.307	377
Заняття 36. Комбіновані рівняння				382
1	Показникові рівняння + прогресія.	7.208	7.047	382
2	Показниково-тригонометричні рівняння.	7.315	7.169	383
3	Степенево-показникові рівняння	7.205; 7.324; 7.325; 7.321; 7.326	7.204; 7.206	384
4	Логарифмо-показникові рівняння.	7.020; 7.029; 7.089; 7.176; 7.239; 7.242; 7.312; 7.328	7.021; 7.030; 7.035; 7.038; 7.117; 7.120; 7.124; 7.226; 7.255	387
5	Логарифмо-тригонометричні рівняння.	7.244		391
Заняття 37. Системи, що містять показникові і показниково-степеневі рівняння				392
1	Одне із рівнянь – показникове, інше – алгебраїчне.	7.276; 7.287	7.143	392

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Обидва рівняння системи – показникові.	7.144; 7.266; 7.288	7.134; 7.339	393
3	Одне із рівнянь – показникове, інше – показниково-степеневе.	7.148		395
4	Одне рівняння – показниково-степеневе, інше – алгебраїчне.	7.279	7.285	396
5	Обидва рівняння системи – показниково-степеневі.	7.277; 7.290	7.138	397
6	Одне рівняння системи – показникове, інше – логарифмічне.	7.136; 7.139; 7.261; 7.269; 7.275; 7.282; 7.336	7.129; 7.132; 7.137; 7.140; 7.149; 7.260; 7.263; 7.271	398
Заняття 38. Системи, що містять логарифмічні та показниково-степеневі рівняння				403
1	Одне з рівнянь системи – алгебраїчне, інше – логарифмічне.	7.128; 7.280; 7.289; 7.334; 7.337	7.131; 7.141; 7.284	403
2	Одне рівняння системи – логарифмічне, інше – показниково-степеневе.	7.267; 7.293; 7.335; 7.338	7.145; 7.294; 7.340	407

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
3	Обидва рівняння системи – логарифмічні.	7.146; 7.259; 7.265; 7.283; 7.291; 7.292	7.130; 7.135; 7.142; 7.147; 7.262; 7.270; 7.272	409
Заняття 39. Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності та нерівності, що зводяться до найпростіших. Заміна змінних у показникових нерівностях				414
1	Найпростіші показникові нерівності та нерівності, що зводяться до найпростіших.	9.037; 9.042; 9.055; 9.077; 9.162	9.051; 9.052; 9.160; 9.173	414
2	Заміна змінних у показникових нерівностях.	9.109; 9.141; 9.219; 9.273	9.054; 9.063; 9.196	417
3	Найпростіші логарифмічні нерівності та нерівності, що зводяться до них.	9.023; 9.025; 9.056; 9.157; 9.243; 9.302	9.019; 9.021; 9.049; 9.075; 9.158; 9.181; 9.156; 9.114	419
Заняття 40 . Розв'язування логарифмічних і показникових нерівностей				423
1	Заміна змінної в логарифмічних нерівностях.	9.092; 9.152; 9.199; 9.216; 9.236; 9.244; 9.247	9.058; 9.137; 9.155; 9.161; 9.245; 9.284	423

№	Тема	Номери зі збірника задач Сканаві		Сторінка
		задач	вправ	
2	Нерівність виду $a(x)^{f(x)} > 1$ ( $a(x)^{f(x)} < 1$ )	9.263; 9.267	9.174	427
3	Нерівність виду $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$ .	9.274		429
4	Нерівність виду $\log_{g(x)} f(x) > c$ ( $\log_{g(x)} f(x) < c$ ).	9.132; 9.187; 9.237; 9.266; 9.269	9.084; 9.131; 9.182; 9.183	405
5	Метод логарифмування обох частин нерівності .	9.165	9.076; 9.178	433
6	Логарифмічні і показникові нерівності з параметром.	9.281; 9.304	9.279; 9.305	434
Додаток. Відповідність між номерами розв'язаних задач				436
Відповіді до вправ				442